



Universität Karlsruhe (TH)

Institut für Innovatives Rechnen und Programmstrukturen (IPD)

Informatik I WS 2002/03

Dozent: Prof. Dr.rer.nat. G. Goos

Übungsleiter: Markus L. Noga

<http://eins.info.uni-karlsruhe.de>

goos@ipd.info.uni-karlsruhe.de

noga@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt 3

Ausgabe: 31.10.2002

Abgabe: 8.11.2002 14:00 Uhr

Einwurf im Keller des Informatik-Hauptbaus (Geb. 50.34)

Aufgabe 1: Grammatik und Sprache (10 T- Punkte)

Sei $G = \{\Sigma, N, P, S\}$ mit $\Sigma = \{a, b, c, y, z\}$, $N = \{D, E, S, U, V, W, X, Y, Z\}$ und Produktionen $P = \{$

$$S \rightarrow X$$

$$X \rightarrow aXb \mid DXE \mid YcZ$$

$$D \rightarrow aa$$

$$E \rightarrow bb$$

$$Yc \rightarrow U$$

$$U \rightarrow yU \mid yW$$

$$V \rightarrow Vz \mid cz$$

$$WZ \rightarrow V$$

$\}$.

1.1 Grammatik \rightarrow Sprache

Geben Sie die von G definierte Sprache $L(G)$ und deren Chomsky-Typ an (Hinweis: G ist CH-0).

Lösung: 5 Pkt.

$\overline{L(G)} = a^n y^s c z^t b^n$. Da die Sprache eine Klammerstruktur $a^n \dots b^n$ enthält, gibt es keine passende reguläre Grammatik. Wie die nächste Teilaufgabe zeigt, gibt es aber eine kontextfreie Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$. Also ist $L(G) \in \text{CH-2}$.

1.2 Sprache \rightarrow Grammatik

Definieren Sie eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$, die in derselben Chomsky-Klasse wie $L(G)$ liegt. Vermeiden Sie Kettenproduktionen und redundante Produktionen.

Lösung: 5 Pkt.

Sei $G' = \{\Sigma, N', P', S\}$ mit Σ wie oben, $N' = \{S, X, Y, Z\}$ und Produktionen $P' = \{$

$$S \rightarrow X$$

$$X \rightarrow aXb \mid YcZ$$

$$Y \rightarrow yY \mid y$$

$$Z \rightarrow zZ \mid z$$

$\}$. Offenbar gilt $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 2: Halbgruppen und Monoide (15 T- Punkte)

Untersuchen und begründen Sie, welche dieser Strukturen (abelsche) Halbgruppen oder Monoide sind:

- die natürlichen ungeraden Zahlen mit der Addition
- die natürlichen geraden Zahlen ohne Null mit der Addition
- die ganzen geraden Zahlen mit der Multiplikation
- die ganzen Zahlen mit der Verknüpfung $a \cdot b = a + 3b$
- die nicht-negativen reellen Zahlen mit der Addition
- die IEEE-754 Fließkommazahlen einfacher Genauigkeit mit der Addition

Lösung: a-c je 2 Pkt. d-f 3 Pkt.

- Nicht algebraisch abgeschlossen ($1+1=2$), also weder noch.
- Abgeschlossenheit klar ($\text{grade}+\text{grade}=\text{grade}$), Assoziativität und Kommutativität aus \mathcal{N} , neutrales Element 0 aus \mathcal{N} ist ausgeschlossen, also abelsche Halbgruppe.
- Abgeschlossenheit, Assoziativität, Kommutativität aus \mathcal{Z} . Neutrales Element 1 ausgeschlossen, also abelsche Halbgruppe.
- Abgeschlossenheit klar. Nicht assoziativ: $a \cdot (b \cdot c) = a + 3(b + 3c) = a + 3b + 9c \neq (a + 3b) + 3c = (a \cdot b) \cdot c$, also weder noch.
- Abgeschlossenheit, Assoziativität, Kommutativität klar. Neutrales Element 0 aus \mathcal{R} , also abelscher Monoid.
- Abgeschlossen (NaN ist legitim), aber nicht assoziativ: $(2^{100} + -2^{100}) + 1 = 1 \neq 0 = 2^{100} + (-2^{100} + 1)$. Also weder noch.

Aufgabe 3: Graphen (20 T- Punkte)

Aufgrund der schlechten Wirtschaftslage will sich eine Transportfirma auf ihr Kerngeschäft konzentrieren. Momentan bedient sie alle Länder in der nachstehenden Liste. Zukünftig will sie nur Länder in der Euro-Zone beliefern.

1	Irland	11	Deutschland		
2	England	12	Polen	21	Rumänien
3	Schottland	13	Frankreich	22	Bulgarien
4	Norwegen	14	Schweiz	23	Slovenien
5	Schweden	15	Spanien	24	Kroatien
6	Finnland	16	Portugal	25	Griechenland
7	Dänemark	17	Italien		
8	Holland	18	Österreich		
9	Belgien	19	Ungarn		
10	Luxemburg	20	Tschechien		

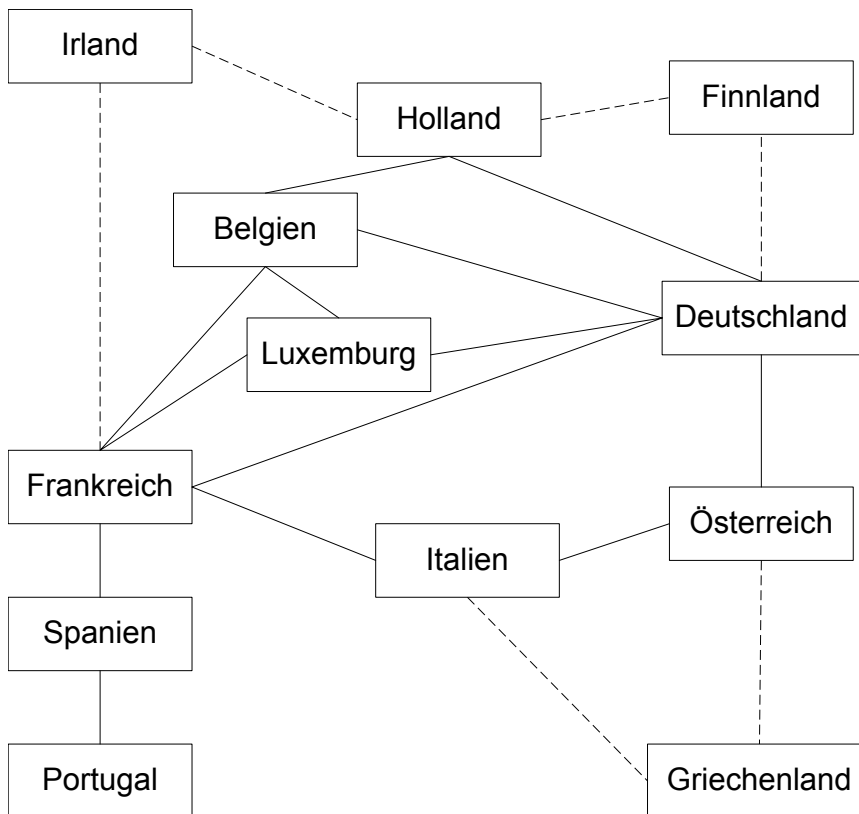


3.1

Erstellen Sie für die Firma anhand der Europakarte einen Graphen, der nur Euroländer beinhaltet. Gemeinsame Landesgrenzen werden hierbei als Kanten angesehen. Desweiteren gibt es noch Luftfrachtverbindungen zwischen den Ländern Finnland - Holland, Finnland - Deutschland, Irland - Holland, Irland - Frankreich, Griechenland - Italien, Griechenland - Österreich, die ebenfalls als Kanten gesehen werden.

Ordnen Sie die Länder in der durch obenstehende Tabelle gegebenen Reihenfolge, um die Korrektur zu vereinfachen.

Lösung: 7 Pkt.



3.2

Welche weiteren Darstellungen gibt es? Stellen Sie Ihre Lösung zu 2.1 in zwei weiteren Repräsentationen dar.

Lösung: 4 Pkt.

Weitere Darstellungen sind: formal, Adjazenzliste, Adjazenzmatrix

Formale Darstellung :

$G = (E, K)$ mit $E = \{\text{Irland, Finnland, Holland, Belgien, Luxemburg, Deutschland, Frankreich, Spanien, Portugal, Italien, Österreich, Griechenland}\}$ und $K = \{\{\text{Portugal, Spanien}\}, \{\text{Spanien, Frankreich}\}, \{\text{Frankreich, Italien}\}, \{\text{Frankreich, Belgien}\}, \{\text{Frankreich, Luxemburg}\}, \{\text{Frankreich, Deutschland}\}, \{\text{Frankreich, Irland}\}, \{\text{Irland, Holland}\}, \{\text{Holland, Finnland}\}, \{\text{Holland, Belgien}\}, \{\text{Holland, Deutschland}\}, \{\text{Deutschland, Finnland}\}, \{\text{Deutschland, Belgien}\}, \{\text{Deutschland, Luxemburg}\}, \{\text{Deutschland, Österreich}\}, \{\text{Österreich, Italien}\}, \{\text{Österreich, Griechenland}\}, \{\text{Griechenland, Italien}\}, \{\text{Belgien, Luxemburg}\}\}$

Adjazenzmatrix:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
Irland (1)			1				1					
Finnland (2)			1			1						
Holland (3)	1	1		1		1						
Belgien (4)			1		1	1	1					
Luxemburg (5)				1		1	1					
Deutschland (6)		1	1	1	1		1				1	
Frankreich (7)	1			1	1	1		1		1		
Spanien (8)							1		1			
Portugal (9)								1				
Italien (10)							1				1	1
Österreich (11)						1				1		1
Griechenland (12)										1	1	

3.3

Welche Ecke des Graphen hat den höchsten Grad?

Ist der Graph zusammenhängend?

Gibt es Endecken?

Gibt es isolierte Ecken?

Lösung: 5 Pkt.

Deutschland und Frankreich haben Grad 6 und somit den höchsten Grad in diesem Graphen.
 Ja, der Graph ist zusammenhängend.
 Ja, Portugal ist eine Ecke, von ihr geht nur 1 Kante ab.
 Isolierte ecken gibt es nicht, da der Graph zusammenhängend ist.(Ecke mit Grad 0)

3.4

Wie lang ist der längste Zyklus im Graphen? Geben Sie diesen an.
 Gibt es einen hamiltonschen oder eulerschen Kreis? Geben Sie eine Lösung an oder begründen Sie.

Lösung: 4 Pkt.

Der längste Zyklus hat die Länge 9:

{Frankreich, Italien }, {Italien, Griechenland }, {Griechenland, Österreich }, {Österreich, Deutschland },
 {Deutschland, Finnland }, {Finnland, Holland }, {Holland, Belgien }, {Belgien, Luxemburg }, {Luxemburg,
 Frankreich }

oder ({Frankreich, Italien}, {Italien, Griechenland}, {Griechenland, Österreich}, {Österreich, Deutschland},
 {Deutschland,Luxemburg}, {Luxemburg, Belgien}, {Belgien, Holland}, {Holland, Irland}, {Irland, Frankreich})

Nein, es gibt keinen hamiltonschen Kreis, da die Ecke Portugal in keinem Kreis enthalten ist.
 Nein, es gibt keinen eulerschen Zyklus, da die Kante {Spanien, Portugal} in keinem Zyklus enthalten ist.

Aufgabe 4: Floyd-Warshall (15 T- Punkte)

4.1

Die Firma will feststellen, ob ihr Routennetz nach der Umstellung einwandfrei funktioniert.
 Der Floyd-Warshall-Algorithmus stellt fest, ob alle Länder erreichbar sind.
 Führen Sie den Algorithmus bis zum dritten Schritt aus, d.h. bestimmen Sie die Matrizen $\sigma^{(init)}$ bis $\sigma^{(3)}$.

Lösung: init 3 Pkt. der Rest je 4 Pkt.

Initialisierungsschritt:

$\sigma^{(init)}$ Der Algorithmus wird über die Adjazenzmatrix und die Einheitsmatrix initialisiert.

$A_{\sigma^{(init)}} = A + E =$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(1)	1		1				1					
(2)		1	1			1						
(3)	1	1	1	1		1						
(4)			1	1	1	1	1					
(5)				1	1	1	1					
(6)		1	1	1	1	1	1				1	
(7)	1			1	1	1	1	1		1		
(8)							1	1	1			
(9)								1	1			
(10)							1			1	1	1
(11)						1				1	1	1
(12)										1	1	1

$k=1$: $\sigma^{(1)} = \sigma^{(init)} \cup \{(i, j) \mid i \sigma^{(init)} 1 \text{ und } 1 \sigma^{(init)} j\}$ "Wege über Knoten 1 "

$A_{\sigma^{(1)}} =$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(1)	1		1				1					
(2)		1	1			1						
(3)	1	1	1	1		1	(1)					
(4)			1	1	1	1	1					
(5)				1	1	1	1					
(6)		1	1	1	1	1	1				1	
(7)	1		(1)	1	1	1	1	1		1		
(8)							1	1	1			
(9)								1	1			
(10)							1			1	1	1
(11)						1				1	1	1
(12)										1	1	1

$k=2$: $\sigma^{(2)} = \sigma^{(1)} \cup \{(i, j) \mid i \sigma^{(1)} 2 \text{ und } 2 \sigma^{(1)} j\}$ "zugelassene Zwischenknoten = $\{1,2\}$ "

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(1)	1		1				1					
(2)		1	1			1						
(3)	1	1	1	1		1	1					
(4)			1	1	1	1	1					
(5)				1	1	1	1					
$A_{\sigma^{(2)}} =$	(6)		1	1	1	1	1				1	
	(7)	1		1	1	1	1	1		1		
	(8)						1	1	1			
	(9)							1	1			
	(10)						1			1	1	1
	(11)					1				1	1	1
	(12)									1	1	1

$k=3$: $\sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} \cup \{(i, j) \mid i \sigma^{(2)} 3 \text{ und } 3 \sigma^{(2)} j\}$ "zugelassene Zwischenknoten = $\{1,2,3\}$ "

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(1)	1	(1)	1	(1)		(1)	1					
(2)	(1)	1	1	(1)		1	(1)					
(3)	1	1	1	1		1	1					
(4)	(1)	(1)	1	1	1	1	1					
(5)				1	1	1	1					
$A_{\sigma^{(3)}} =$	(6)	(1)	1	1	1	1	1				1	
	(7)	1	(1)	1	1	1	1	1		1		
	(8)						1	1	1			
	(9)							1	1			
	(10)						1			1	1	1
	(11)					1				1	1	1
	(12)									1	1	1

Informelle Arbeitsweise des Algorithmus:

Nimm Zeile X und kopiere ihren Inhalt in alle Zeilen, die in Spalte X eine 1 aufweisen, gehe zu Zeile X+1.